Corrigé

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $3y' - 3y = 2y' + 2y - 5 \Leftrightarrow y' = 5y - 5$, on est donc dans le cas $a = 5$ et $b = -5$. On en déduit que les solutions de $3y' - 3y = 2y' + 2y - 5$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{5x} + 1$, où C est un réel. On détermine C tel que $F\left(\frac{1}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{5\times\frac{1}{5}} + 1 = 0 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{1} + 1 = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{\mathrm{e}} = -\mathrm{e}^{-1}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{5x} + 1 = -\mathrm{e}^{5x-1} + 1$.

2. $y - y' = 3y' + 2y + 4 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y - 1$, on est donc dans le cas $a = -\frac{1}{4}$ et $b = -1$. On en déduit que les solutions de $y - y' = 3y' + 2y + 4$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} - 4$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(4) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{4}{4}} - 4 = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-1} = 5 \Leftrightarrow C = 5\mathrm{e}^{1}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 5\mathrm{e}^{1} \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} - 4 = 5\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}+1} - 4$.